Nombres entiers.

Livre p.14 et 28.

Objectifs :

— Connaître les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

— Connaître et savoir utiliser les notions de multiple, diviseur, nombre pair, nombre impair, nombre premier pour modéliser et résoudre des problèmes.

— Savoir présenter ses résultats sous la forme de fractions irréductibles.

Aperçu historique :

FIGURE 1.1 – Euclide

Dans ce chapitre, nous allons nous initier à l'arithmétique (du grec arithmos - nombre), qui est la branche des mathématiques consacrée à l'étude des nombres, et plus particulièrement des entiers (naturels puis relatifs). L'origine de l'arithmétique semble être une invention phénicienne (Liban actuel). Dans l'école pythagoricienne, à la deuxième moitié du VIe siècle av. J.-C., l'arithmétique était, avec la géométrie, l'astronomie et la musique, une des quatre sciences quantitatives ou mathématiques (Mathemata). Quant aux nombres premiers, on en trouverait trace sur l'os d'Ishango daté à plus de 20 000 ans avant notre ère. Des tablettes d'argile séchées Mésopotamiennes (Irak actuel) du IIe millénaire av. J.-C. montrent la résolution de problèmes qui suggèrent l'utilisation de nombres premiers. Dans les mathématiques égyptiennes, le calcul fractionnaire , qui ne considérait que les inverses d'entiers (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...) nécessitait de disposer d'une liste de nombres premiers.
La première trace incontestable de la présentation des nombres premiers remonte à l'Antiquité (vers 300 av. J.-C.), et se trouve dans les ÉLÉMENTS D'EUCLIDE *(livres VII à IX). Euclide donne la définition des nombres premiers, la preuve de leur infinité, la définition du plus grand commun diviseur (pgcd) et du plus petit commun multiple (ppcm), et les algorithmes pour les déterminer, aujourd'hui appelés algorithmes d'Euclide. Les connaissances présentées lui sont toutefois bien antérieures.*

1. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Définition 1.1 Les nombres entiers positifs ou nuls 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ... s'appellent des ***entiers naturels*** . Il y en a une infinité, et leur ensemble se note $\mathbb{N}$.

On note donc $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;5;...\}$ où les pointillés signifient que la liste continue indéfiniment.
Dans cette notation, les accolades signifient "***ensemble*** ", les nombres 0 ; 1 ; 2... sont les ***éléments*** de cet ensemble, et on les énumère en les séparant par des points-virgule.

Définition 1.2 En mathématiques, pour signifier qu'un ***élément*** appartient à un ***ensemble*** , on utilise la notation $\in$ ("est élément de"). La notation $\notin$ signifie "n'est pas élément de".

Exemple :

- $2 \in \mathbb{N}$
- $4,5 \notin \mathbb{N}$
- $0 \in \mathbb{N}$
- $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$
- $A \in (AB)$

Définition 1.3 Les nombres entiers négatifs, nul ou positifs ... ;-4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ... s'appellent des ***entiers relatifs*** . Il y en a une infinité, et leur ensemble se note $\mathbb{Z}$.

On note $\mathbb{Z} = \{...; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$ où les pointillés signifient que la liste continue indéfiniment.

Propriété 1.1 Les nombres entiers naturels font partie des nombres entiers relatifs.

Définition 1.4 En mathématiques, pour signifier qu'un ***ensemble*** est inclus dans un autre ***ensemble*** , on utilise la notation $\subset$ ("est inclus dans" ou "est un sous-ensemble de").

On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, ou que l'ensemble $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{Z}$.
On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
La négation de $\subset$ se note $\not\subset$.

Exemple :

- $\{0; 4; 87\} \subset \mathbb{N}$
- $\{-12; 5; 42\} \subset \mathbb{Z}$
- $[AB] \subset (AB)$

Remarque 1.1 :

- Attention à ne pas confondre le symbole $\in$, qui se place entre un élément et un ensemble, et le symbole $\subset$, qui se place entre deux ensembles.
- Il existe des ensembles réduits à un éléments, par exemple $\{1\}$, l'ensemble constitué d'un seul élément, le nombre 1. On dit que c'est un singleton. Comme c'est un ensemble, on note $\{1\} \subset \mathbb{N}$.
- ***L'ensemble vide*** est un ensemble qui ne comporte aucun élément. On le note $\emptyset$ (sans accolades).

2. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

Définition 1.5 Soient $a \neq 0$ et b deux nombres entiers relatifs. On dit que a est un ***diviseur de*** b, ou que a ***divise*** b lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$.
On dit aussi que b est un ***multiple de*** a, ou que b est ***divisible par*** a.

Exemple :

- 4 est un diviseur de 20
- 4 divise 20
- 20 est un multiple de 4
- -15 est un multiple de 3
- -2 divise -48

On note parfois $4|20$ pour "4 divise 20".

Propriété 1.2 Soit $a \in \mathbb{Z}$. La somme de deux multiples de a est aussi un multiple de a.

Démonstration Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$, avec b et c multiples de a.
Dire que b est multiple de a signifie qu'il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$.
De la même manières, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = k' \times a$.
Ainsi $b + c = k \times a + k' \times a = \underbrace{(k + k')}_{\ell} \times a = \ell \times a$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$, donc la somme $a + b$ est bien un multiple de a.

Propriété 1.3 Rappel de quelques critères de divisibilité :

- Un nombre est divisible par 2 ssi son chiffre des unités est pair.
- Un nombre est divisible par 3 ssi la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 5 ssi son chiffre des unités est 0 ou 5.

N.B. : L'abréviation "ssi" signifie "si et seulement si"

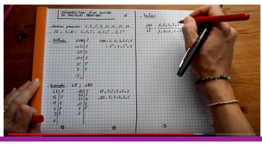
3. Nombres premiers, décomposition en facteurs premiers.

Définition 1.6 Un nombre entier naturel est dit ***premier*** si et seulement si il admet exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}$: 1 et lui-même.

Exemple 1 n'est donc pas considéré comme premier.
La liste des nombres premiers commence par 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23... et on admet qu'il y en a une infinité (cela se démontre par exemple à l'aide de la propriété ci-dessous).

Propriété 1.4 Théorème fondamental de l'arithmétique (admis) :
Tout nombre entier naturel peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.
Cette écriture est unique, à l'ordre des facteurs près.
On l'appelle la ***décomposition en facteurs premiers*** du nombre.

Tutoriel 1.1 Tutoriel vidéo de la méthode dite "de l'échelle" pour décomposer un nombre en facteurs premiers : Chaîne Youtube "Maths Langella",
Playlist : 2nde, vidéo : "Décomposition d'un entier en facteurs premiers".



Propriété 1.5 Il y a une infinité de nombres premiers distincts.

Démonstration Démonstration faite en exercice.

4. Nombres pairs, nombres impairs.

Définition 1.7 Soit $a \in \mathbb{Z}$.

- a est un nombre ***pair*** ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2 \times k$.
- a est un nombre ***impair*** ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2 \times k + 1$.

Propriété 1.6 Soit $a \in \mathbb{Z}$.

- a^2 est pair ssi a est pair.
- a^2 est impair ssi a est impair.

Démonstration Démonstration faite en exercice.

5. (Exemple de) Synthèse sur les nombres entiers.

- $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$ entiers naturels
- $\mathbb{Z} = \{...; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$ entiers relatifs
- $a|b : \exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $b = k \times a$
- Nombres premiers : seulement divisibles par 1 et eux-mêmes.
- Décomposition en facteurs premiers.
- Nombre pair $2k$, impair $2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$